

Daniel Alonso Ramírez

IUdEA, *Instituto Universitario de Estudios Avanzados y Facultad de Físicas*

Cuestiones Física Estadística

Foreword

Las cuestiones y problemas corresponden a las sesiones que se han desarrollado en clase. En combinación con la colección de problemas y las clases teóricas, las tareas asignadas están ideadas de manera que se pueda llevar una actividad de estudio independiente por parte del alumnado.

Contents

Daniel Alonso Ramírez

<i>Foreword</i>	iii
1. Tema 1: Elementos de Teoría de Probabilidades. Conceptos elementales	1
1.1 Sesión 1	1
1.2 Sesión 2	3
1.3 Sesión 3	5
2. Tema 2: Colectivos de Gibbs. Caso clásico	7
2.1 Sesión 4	7
2.2 Sesión 5	7
2.3 Sesión 6	8
2.4 Sesión 7	8
2.5 Sesión 8	9
2.6 Sesión 9	9
2.7 Sesión 10	9
3. Tema 3: Colectivos de Gibbs. Caso Cuántico	11
3.1 Sesión 11	11
3.2 Sesión 12	11
3.3 Sesión 13	12
3.4 Sesión 14	12
3.5 Sesión 15 y 16	12
3.6 Sesión 17	13
3.7 Sesión 18	13
3.8 Sesión 19	13
3.9 Autoevaluación	13
3.10 Sesión 20	14
4. Tema 4: Gases ideales cuánticos	15

4.1	Sesiones 21,22	15
4.2	Sesión 23	16
4.3	Sesión 24	17
4.4	Sesión 25	18
	4.4.1 Aplicaciones. Materia en condiciones extremas	19
4.5	Sesión 26	19
	4.5.1 Enanas Blancas (<i>White dwarfs</i>)	19
4.6	Sesión 27	20
	4.6.1 Diamagnetismo de Landau	20
4.7	Sesión 28	22
	4.7.1 Paramagnetismo de Pauli	22
4.8	Sesión 29	22
	4.8.1 Gases ideales de Bose: Fotones.	22
	4.8.2 Argumento termodinámico conducente a $u = CT^4$	24
4.9	Sesión 30	24
	4.9.1 Gas de Bose: Valores posibles de la fugacidad z	24
	4.9.2 Fugacidad en función de v y T	25
	4.9.3 Fracción de bosones en el estado fundamental. Condensación de Bose	25
	4.9.4 Presión	26
	4.9.5 Energía media y capacidad calorífica	26
	4.9.6 Comentario	26
	Appendix A Fórmulas	27

Chapter 1

Tema 1: Elementos de Teoría de Probabilidades. Conceptos elementales

1.1 Sesión 1

Nota: Para desplegar y contar de forma rápida un los eventos podrías emplear el ordenador. Tiempo medio (estimado) de trabajo: Una hora

(1) En el caso de un dado de seis caras identifica los conceptos:

- **Evento**
- **Población**
- **Espacio de muestra**

(2) Se lanza un dado 135 veces y como resultado se obtiene la tabla siguiente:

Cara	frecuencia
1	21
2	22
3	17
4	23
5	25
6	27

- ¿Cuáles serían las probabilidades que asignarías a los diferentes elementos del espacio de muestra basándote en este experimento?
- (3) Se lanzan tres dados idénticos y bien equilibrados de modo que no hay *a priori* ningún evento privilegiado. Cada evento consiste en las tres caras que muestran los dados al reposar en una mesa.
- ¿Cuántos elementos tiene el espacio de muestra en este caso?
 - Se construye la variable *suma de los puntos mostrados por las tres caras de los tres dados*. ¿Cuales serían los eventos más improbables?
 - ¿Cuál o cuáles los más probables?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que al menos en un dado salga la cara con un único punto?

- ¿Cuál es la probabilidad de que salgan al menos dos caras con un único punto?
- (4) Aprovechando lo que sabes en el caso de dos dados repasa y comprueba los conceptos
- Probabilidad de que salga una cara i o una j . $p(i \vee j) = p(i \text{ Or } j)$
 - Probabilidad de que salga una cara i y una j . $p(i \wedge j) = p(i \text{ And } j)$

- (5) **Distribuciones marginales:** Si tomas dos dados y a cada cara asignas un número del uno al seis y consideras la probabilidad de que te salgan dos números, puedes definir una distribución de probabilidad para el resultado de tirar dos dados. Si llamas a dicha probabilidad $p(x, y)$ con $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ la marginal asociada a los eventos x se escribe como;

$$p(x) = \sum_{y: \text{eventos } y} p(x, y).$$

Si tienes dos dados calcula la probabilidad de obtener un 5 en el primer dado independientemente del resultado que se obtenga en el segundo:

- Hazlo identificando los eventos a los que se refiere la pregunta y calculando su probabilidad directamente del espacio de muestra y a partir de tu cálculo identifica la distribución marginal.
- (6) Un experimento y la **información** a priori que se te suministra. Se tiene una caja que al presionar un botón arroja bolas blancas o negras con igual probabilidad. Restricciones en el experimento hacen que se pueda pulsar el botón solo dos veces. Un compañero ha obtenido así dos bolas.
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una bola de las dos bolas de tu compañero sea negra?
 - Sabemos que una bola es negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también lo sea?
 - Sabemos que la primera bola que obtuvo fue negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda lo sea?
- Discute los resultados.

1.2 Sesión 2

(1) Tomando los datos de la tabla 1.1.

- ¿Cuál es el valor medio de los resultados obtenidos?
- ¿Cuál es su desviación estándar?
- Si se aplica la función log a los resultados de cada tirada, ¿cuál sería el valor medio de esta función estocástica?

(2) Sistema cuántico de dos niveles

Considera un sistema de dos niveles. Los estados propios de la energía son $|1\rangle, |2\rangle$, con energías E_1, E_2 . Si el estado del sistema es $|f\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$,

- Calcula la probabilidad asociada a las energías E_1, E_2 .
- Expresa la energía media del sistema en el estado $|f\rangle$

(3) Sistema cuántico con espaciación de Hilbert de dimensión finita.

Considera ahora que se tiene un sistema cuántico descrito por vectores $|v\rangle$ de un espacio de Hilbert \mathcal{H} de dimensión d . Para dicho sistema se considera un observable \hat{A} . Los vectores y valores propios (que asumimos no degenerados) de dicho observable son $|a\rangle$ y a con $a \in \{1, 2, \dots, d\}$. El estado del sistema es $|f\rangle \in \mathcal{H}$.

- Calcula la probabilidad asociada al autovalor a
- Expresa el valor medio $\langle f | \hat{A} | f \rangle$

(4) Distribuciones continuas: Distribución Gaussiana

Se tiene una variable aleatoria continua ϕ que puede tomar valores en toda la recta real. Dicha variable está distribuida gaussianamente de modo que su densidad de probabilidad es

$$\rho(\phi) = \frac{e^{-(\phi - \langle \phi \rangle)^2 / 2\sigma_\phi^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}}$$

- Muestra que $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\phi) d\phi = 1$
- Calcula el valor medio de ϕ
- Calcula la varianza de ϕ
- Si $g(\phi)$ es una función estocástica y la distribución $\rho(\phi)$ es tal que $\sigma_\phi^2 \rightarrow 0$, muestra que el valor medio de $g(\phi)$ tiende a $g(\langle \phi \rangle)$

(5) El siguiente código Python te permite generar secuencias de números aleatorios distribuidos gaussianamente con media y varianza dadas. Una vez que hayas generado una lista de números, inserta en el código las líneas que se te piden. El código está disponible en el aula virtual.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
```

```
Statistical Physics: La Laguna University
```

```

Daniel Alonso
IUdEA: Instituto Universitario de Estudio Avanzados
ULL
Created on Wed Feb 22 22:01:55 2012
@author: dalonso
"""

#!/usr/bin/env python
"""

Import the libraries
"""

import numpy
import matplotlib.mlab
import matplotlib.pyplot

"""

Generates a large set of random numbers
Gaussian distributed
av= average value
sigma= rms
nevents= number of events
randn(n)= Genera numeros distribuidos gaussianamente con media cero
y varianza unidad.en un array (d0, d1, ..., dn).
"""

av, sigma, nevents = 0, 0.3, 30000
x = av + sigma*numpy.random.randn(nevents)

"""

x= array de numeros gaussianos con media mu y varianza sigma**2
f(x)=(2*pi*sigma**2)**(-1/2) Exp(-(x-av)**2/2sigma**2)
"""

"""

EJERCICIO:

Introduce aqui las líneas necesarias
para evaluar la media y varianza de los datos x
Compara tus resultados con los obtenidos teóricos (datos introducidos av, sigma)
"""

#AQUI TUS LINEAS
# Histograma: Cambia la variable bins y observa que ocurre!

```

```

n, bins, patches = matplotlib.pyplot.hist(x, 50, normed=1, facecolor='blue', alpha=0.95)

# Se genera y superpone en el gráfico la mejor curva Gaussiana
# que ajuste los datos

y = matplotlib.mlab.normpdf( bins, av, sigma)
l = matplotlib.pyplot.plot(bins, y, 'r-', linewidth=1)

matplotlib.pyplot.xlabel(r'$\phi$')
matplotlib.pyplot.ylabel(r'$\mathrm{Frecuencia}$')
matplotlib.pyplot.title(r'$\mathrm{Histograma \ , normalizado \ , (\ 'area \ ,unidad)}$')
matplotlib.pyplot.axis([-2,2,0,1.5])
matplotlib.pyplot.grid(False)

matplotlib.pyplot.show()

```

1.3 Sesión 3

(1) Teorema del límite central

Se tienen n variables aleatorias $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ todas con igual media μ y varianza σ^2 . Es decir $\langle x_i \rangle = \mu$ y $\langle (x_i - \mu)^2 \rangle = \sigma^2, \forall i$. Si se considera la variable estocástica $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ se demuestra que para $n \rightarrow \infty$ la distribución de probabilidad de S tiende a una distribución normal de media $\langle S \rangle = n\mu$ y varianza $\sigma_S = n\sigma^2$.

Considera los siguientes objetos:

- Se define la **función característica** $\hat{P}_1(k)$ de una distribución de probabilidad $P(x)$ de una variable aleatoria $x \in \mathbb{R}$ como el valor esperado de e^{-ikx} , *i.e.*

$$\hat{P}_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx P(x) e^{-ikx} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(x) e^{-ikx}.$$

Muestra que los valores medios de $x, x^2, \dots, x^n, \dots$ pueden obtenerse como derivadas de la función característica evaluadas en $k = 0$.

- El teorema de Taylor nos permite escribir

$$e^x - 1 = \sum_{j=1}^l \frac{x^j}{j!} + r_l(x)x^l \text{ tal que } \lim_{x \rightarrow 0} r_l(x) \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

$$y \quad (1.2)$$

$$\log(1-x) = - \sum_{j=1}^l \frac{x^j}{j} + r_l(x)x^l \text{ tal que } \lim_{x \rightarrow 0} s_l(x) \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Si se considera la función

$$\log\left(1 + \sum_{j=1}^l \frac{(-ik)^j}{j!} \langle x^j \rangle\right).$$

Obtén una serie de Taylor en la variable k hasta términos con k^3 .

- Sigue los pasos efectuados en clase para probar el Teorema del Límite Central (TLC).

(2) ^ℵ¹ Nivel avanzado . Experimento numérico.

Supongamos que se tienen 10000 personas y a cada una se le dan n dados idénticos y totalmente simétricos (¡excepto por las muescas de sus caras!). Un ensayo del experimento consiste en que cada persona lanza sus n dados, efectúa la suma las caras que han salido y se registran los 10000 resultados. Por ejemplo, si la primera persona arroja sus $n = 3$ dados y obtiene $\{2, 4, 6\}$ registra el número 12. La segunda obtiene $\{1, 3, 6\}$ y registra el número 11 y así hasta tener los 10000 registros. Con los 10000 registros se representa un histograma que tendrá valores entre 3 ($\{1, 1, 1\}$) y 18 ($\{6, 6, 6\}$).

- ¿Cuál es la media y varianza asociada a un experimento en el que cada persona tiene un único dado?
- Elabora en **Python** código numérico que represente los histogramas asociados a 10000 personas pero con $n = 1, 2, 3, 10, 20, 100$ dados. ¿Vés el TLC en acción?. ¿Corresponden la media y varianza de los distintos experimentos, para n creciente, con lo que se espera del TLC?

¹Los ejercicios marcados con ℵ son opcionales y se subirán a través de la tarea correspondiente en el aula virtual

Chapter 2

Tema 2: Colectivos de Gibbs. Caso clásico

2.1 Sesión 4

(1) Problema 2.1.1

2.2 Sesión 5

(1) Problema 2.1.2

- En la enumeración de los estados hemos incluido un factor $N!$. Su origen está en la conocida *paradoja de Gibbs* y se justifica posteriormente partiendo de la física cuántica. Investiga dicha paradoja. http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_paradox
- Discute el límite termodinámico.

(2) *Entretención*. Calcula el volumen de una esfera de radio r en d dimensiones.

- Si se define la función escalón

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \forall x > 0 \\ 0, & \forall x < 0. \end{cases}$$

La función $\Theta(r^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2))$ definida en el espacio d dimensional (x_1, x_2, \dots, x_d) es distinta de cero en todos los puntos que están en el interior de una esfera de radio r por lo tanto el volumen de dicha esfera es:

$$V_d(r^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_d \Theta(r^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)).$$

De donde se infiere que

$$V_d(r^2) = \int_{-r}^r dy V_{d-1}(r^2 - y^2).$$

Si escribimos $V_d(r^2) = \alpha_d r^d$ (con α_d un coeficiente) muestra que se verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$\alpha_d = \alpha_{d-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}$$

- Por último muestra a partir del resultado anterior que como $\alpha_2 = \pi$ se sigue $\alpha_d = \Gamma(\frac{1}{2})^d / \Gamma(\frac{d}{2} + 1)$ y por lo tanto el volumen de la esfera d -dimensional de radio r es

$$V_d = r^d \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^d}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}$$

(3) Fórmula de Stirling.

La función Gamma Γ tiene la representación integral $\Gamma(N + 1) = \int_0^\infty du u^N e^{-u}$, $\forall N > -1$. Muestra que para $N \gg 1$ se tiene

$$\log(\Gamma(N + 1)) \approx N \log(N) - N, \quad N \gg 1$$

Para concluir el resultado puedes seguir los siguientes pasos:

- Muestra que la función $u^N e^{-u}$ tiene un máximo en $u = N$
- Representa gráficamente la función para valores crecientes de N .
- Si se escribe $u^N e^{-u} = e^{Nh(u, N)}$ se sigue $Nh(u, N) = -u + N \log(u)$. Desarrolla $N \log(u)$ hasta órdenes cuadráticos en el entorno del punto $u = N$.
- Con la aproximación de $Nh(u, N)$ que has obtenido tienes una aproximación de $u^N e^{-u}$. Empléala y obtén una aproximación de $\Gamma(N + 1) = \int_0^\infty du u^N e^{-u}$.

2.3 Sesión 6

(1) Problema 2.1.5. Gas ideal clásico en el colectivo canónico

- En el colectivo canónico juega un papel central la energía libre de Helmholtz. Discute el significado físico de esta cantidad en un sistema sencillo. http://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_free_energy
- Compara y discute tus resultados en el gas canónico con los obtenidos en el colectivo microcanónico.

2.4 Sesión 7

(1) Problema 2.1.5. Gas ideal clásico en el colectivo isoterma-isobárico y colectivo Gran-canónico

- Repite los pasos desarrollados en clase para obtener la ecuación de estado del gas ideal en éstos colectivos.

- ¿Cuáles son los potenciales termodinámicos asociados a los colectivos Canónico, Isotermo-Isobárico y Gran-canónico?
- En el colectivo Gran-canónico se mantiene el sistema a *potencial químico constante*. ¿Puedes explicar qué es el potencial químico? Desarrolla tu respuesta apoyándote en lo que conoces del gas ideal.

2.5 Sesión 8

- (1) Repasa los argumentos y consideraciones que conducen a la distribución de Maxwell de velocidades
- (2) Resuelve el problema 2.2.4 de la colección
 - Repasa el efecto Doppler y obtén la expresión empleada en el problema: $\lambda = \lambda_0(1 + \frac{v_x}{c})$, con λ_0 la longitud de ondas de la emisión en reposo, v_x la componente x de la velocidad del agente emisor de radiación y c la velocidad de la luz.
 - Elabora un argumento que conduzca a una expresión de la intensidad que te pide el problema.

2.6 Sesión 9

- (1) Resuelve los problemas 2.1.6, 2.1.7 y 2.1.9 de la colección
- (2) Con los resultados obtenidos elabora un modelo para la presión atmosférica. Ten en cuenta los siguientes datos:
 - Densidad del aire a nivel del mar, $\rho_0 = 1.3 \text{ kg/m}^3$. La aceleración de la gravedad $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ y la presión media a nivel del mar en S/C de Tenerife durante el mes de febrero de 2012 es aproximadamente $p_0 = 102000 \text{ Pa} = 1020 \text{ hPa} = 1020 \text{ mb (milibares)}$. Con estos datos ¿puedes dar una estimación de la presión atmosférica en el pico del Teide a 3718 m ?
 - Una vez que hayas efectuado la estimación compárala a las registradas en esta página http://es.windfinder.com/forecast/parque_nacional_del_teide.

2.7 Sesión 10

- (1) Empleando la desigualdad de Schwarz (<http://mathworld.wolfram.com/SchwarzsInequality.html>) prueba que la varianza de la energía en el colectivo canónico es positiva y por lo tanto la capacidad calorífica a volumen constante también lo es.
- (2) Demuestra siguiendo los pasos efectuados en clase que en el caso del gas ideal

se verifica

$$\left(\frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \langle N \rangle^{-\frac{1}{2}}$$

(3) Fluctuación de la energía en el gas ideal.

- Calcula la energía media y capacidad calorífica a volumen constante de un gas ideal de N partículas en un volumen V a temperatura T .
- Empleando la relación $\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = k_B T^2 C_V$ y el resultado anterior demuestra que

$$\left(\frac{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}{\langle H \rangle^2}\right)^{1/2} = \sqrt{2/3} \langle N \rangle^{-\frac{1}{2}}$$

Chapter 3

Tema 3: Colectivos de Gibbs. Caso Cuántico

3.1 Sesión 11

- (1) Si se tiene una matrix densidad $\hat{\rho}$ asociada a un estado *puro* demostrar que $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$
- (2) En el caso de que el estado sea *mezcla* probar que $Tr(\hat{\rho}^2) \leq Tr(\hat{\rho})$
- (3) Se define una matriz densidad $\hat{\rho} = \sum_j \omega_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$. Demostrar que la matriz densidad es definida positiva con $\sum_j \omega_j = 1$ y $\omega_j \geq 0 \forall j$
- (4) Algo de matemáticas. Si $f(x, y)$ es una función de dos variables,
 - (a) ¿Cuáles son las condiciones de extremo para dicha función?
 - (b) Si adicionalmente existe una ligadura entre las variable x e y expresada de la forma $y = g(x)$, ¿Cuál es el extremo de f que satisface la ligadura?. Expresa las condiciones matemáticas para evaluarlo.
 - (c) Emplea el método de multiplicadores de Lagrange para resolver el problema del apartado anterior. Comprueba que tu resultado coincide con el derivado anteriormente en el caso de que $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ y $y = 3x + 1$
- (5) Se define la entropía asociada a un operados densidad $\hat{\rho}$ como

$$S_{\hat{\rho}} = -k_B Tr(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}).$$

Calcular la forma que ha de tener $\hat{\rho}$ para que $S_{\hat{\rho}}$ sea máxima en las siguientes situaciones:

- (a) La energía media del sistema $Tr(\hat{\rho}\hat{H}) = E = ct$.
- (b) Además de la energía media el número de partículas media sea constante, es decir; $Tr(\hat{\rho}\hat{N}) = ct$.
Sigue el procedimiento estudiado en clase.
- (c) ¿Qué colectivos tenemos en cada caso?

3.2 Sesión 12

- (1) Problema 2.2.5.2

- ¿Qué significa en este sistema altas y bajas temperaturas?
- Analiza el comportamiento de la capacidad calorífica en los límites de bajas y altas temperaturas. Discute la respuesta.
- Calcula la entropía de este sistema. Como en el apartado anterior estudia los límites de altas y bajas temperaturas.

(2) Problema 2.2.6

- Estudia el comportamiento de la energía media en los límites de intensidad del campo magnético alta y baja. Discute los resultados

3.3 Sesión 13

(1) Problema 2.1.4

- Representa gráficamente la entropía del sistema en función de la energía por partícula.
- Representa la temperatura en función de la energía por partícula.
- Discute ambas gráficas en los casos $E < 0$ y $E > 0$.
- Si tienes un termómetro clásico de mercurio y se ponen en contacto con un sistema como el estudiado con energía positiva, describe como se establece el equilibrio entre ambos sistemas.

3.4 Sesión 14

(1) Problema 2.1.3

- Representa gráficamente la energía por partícula y la capacidad calorífica en función de la variable $k_B T/h\nu$.
- Estudia los límites de altas y bajas temperaturas. Obtén expresiones analíticas en dichos límites.
- Calcula la entropía del sistema y discute su estructura.

3.5 Sesión 15 y 16

(1) Partícula cuántica libre en una caja. Problemas 2.2.7 y 2.4.1

- Evalúa las propiedades estadísticas de una partícula libre en una caja. Calcula la función de partición canónica.
- Calcula la energía y capacidad calorífica por partícula.
- Calcula la entropía por partícula.
- Analiza tus resultados en los límites de altas y bajas temperaturas.
- Evalúa en representación de posiciones los elementos de matriz del operador densidad.

- Discute el resultado en función de la longitud de onda térmica $\lambda = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$, con h la constante de Planck, m la masa de la partícula, k_B la constante de Boltzmann y T la temperatura.

3.6 Sesión 17

(1) Gas ideal de moléculas diatómicas. Problemas 2.2.3.1

- Calcula la función de partición canónica clásica de un gas ideal de moléculas diatómicas en las que la energía de vibración y rotación están desacopladas.
- Calcula en el límite de altas temperaturas la energía por molécula y la capacidad calorífica. Discute qué es el límite de altas temperaturas en este caso.

3.7 Sesión 18

(1) Problema 2.2.3.2

- Calcula la energía media y capacidad calorífica. Analiza el límite de altas y bajas temperaturas.
- Calcula el momento magnético medio por partícula, *i.e* $m = \langle \mu \cos \theta \rangle$
- En el límite de $\beta \mu B \ll 1$ calcula el momento magnético total por unidad de volumen $Nm/V = \chi B$ y da una expresión explícita de la susceptibilidad magnética χ . Muestra que decrece con la temperatura T como $1/T$ (Ley de Curie).

3.8 Sesión 19

(1) Problema 2.3.2

- Evalúan la función de partición en los límites de altas y bajas temperaturas. Discute la respuesta.
- Calcula numéricamente la función de partición y compára tu resultado con la expresiones aproximadas del apartado anterior.
- Calcula la capacidad calorífica y represéntala gráficamente. Discute el resultado, en particular la presencia de un máximo en la capacidad calorífica.

3.9 Autoevaluación

Resuelve de manera independiente los siguientes problemas de la colección.

(1) Problema 2.3.1: Teorema de equipartición Aplicar el teorema de equipartición

para evaluar el valor medio de la energía de los siguientes hamiltonianos:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}.$$

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz.$$

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \kappa(x^2 + y^2)/2.$$

$$H = \frac{p_r^2 + p_\theta^2/r^2}{2m} + \kappa r^2/2.$$

- (2) Problema 2.4.1: Función de partición de una partícula libre en una caja. Encontrar expresiones aproximadas de la función de partición de una partícula cuántica en un pozo infinito de dimensión L en los límites de altas y bajas temperaturas. Obtener la capacidad calorífica C_L y la ecuación de estado $f(P, T, L) = 0$ en los límites mencionados.

- (3) Problema 2.4.4: Molécula de hidrógeno

La energía potencial entre los átomos de una molécula de hidrógeno se puede modelar por un potencial de Morse

$$V(r) = V_0(e^{-2(r-r_0)/a} - 2e^{-(r-r_0)/a}),$$

con $V_0 = 7 \times 10^{-12} \text{erg}$, $r_0 = 8 \times 10^{-9} \text{cm}$ y $a = 5 \times 10^{-9} \text{cm}$

- Encontrar la frecuencia angular más baja del movimiento rotacional y la frecuencia de las pequeñas oscilaciones.
- Estimar las temperaturas T_{rot} y T_{vib} en las que la rotación y la vibración contribuyen significativamente a la energía interna.

3.10 Sesión 20

- (1) Considera partículas independientes en un campo magnético \mathbf{H} con componentes de momento angular en la dirección del campo dadas por $g\mu_B m$ con $m = J, J-1, \dots, -J+1, -J$.

- Calcula la magnetización \mathcal{M} de un material con n partículas por unidad de volumen
- Calcula la susceptibilidad magnética χ para campo débil a altas temperaturas ($g\mu_B JH \ll k_B T$). Recuerda que para campo débil puedes evaluar $\chi = k_B T \partial_H \ln Z_C$. Con Z_C la función de partición canónica (la permeabilidad magnética se a tomado unidad).
- Analiza tus resultados en los casos $J = 1/2$ y $J \rightarrow \infty$ ($g\mu_B J \rightarrow \mu_0$).
- Calcula la energía media y capacidad calorífica del sistema. Representa gráficamente la capacidad calorífica en función de $x = \beta g\mu_B H J$.

Chapter 4

Tema 4: Gases ideales cuánticos

4.1 Sesiones 21,22

(1) Partículas idénticas en Física Cuántica

- Discute porqué en el mecánica clásica las partículas son distinguibles.
- Ilustra para el caso de dos partículas cuánticas el **Principio de simetrización**: *Los estados dinámicos de N partículas idénticas son necesariamente simétricos o antisimétricos respecto al intercambio de cualesquiera dos partículas.*
- El teorema de **Spín-Estadística** nos dice: *Partículas con spín entero siguen la estadística de Bose-Einstein (bosones: funciones de ondas simétricas), mientras que las partículas con spín semientero siguen la estadística de Fermi-Dirac (fermiones: funciones de ondas antisimétricas).* Si se tienen dos partículas confinadas en un cubo de lado L escribe las funciones de ondas para los dos estados de energías más bajas en el caso de dos fermiones y dos bosones. Explicita el principio de exclusión de Pauli.

(2) Entretenimiento. Modelo estandar de partículas elementales. En nuestro estado actual de conocimiento las partículas elementales son fermiones o bosones. Los fermiones están a su vez clasificados en leptones y quarks. Los fermiones son los constituyentes fundamentales de la materia y hay tres familias de ellos (¡sin que sepamos muy bien porqué!):

- Familia 1: Leptones: El electrón e y su neutrino ν_e . Los quarks "up" u y "down" d .
- Familia 2: Leptones: El muón μ y su neutrino ν_μ . Los quarks "strange" s y "charm" c .
- Familia 3: Leptones: La partícula τ y su neutrino ν_τ . Los quarks "bottom" b y "top" t .

Los bosones representan los *mediadores* de la interacción. Los fotones γ son los responsables de la interacción *electromagnética* entre partículas cargadas. Los bosones Gauge Z^0 , W^+ y W^- median en las interacciones de la *fuerza débil* y los (ocho) gluones g median la *fuerza fuerte* (que cohesionan a los quarks).

Fermiones	Familia 1	Familia 2	Familia 3	Bosones
Quarks:	u	c	t	γ
Quarks:	d	s	b	g
Leptones:	ν_e	ν_μ	ν_τ	Z^0
Leptones:	e	μ	τ	W^\pm

- (3) Completa la tabla anterior indicando el spín de cada una de las partículas elementales.
- (4) El protón está compuesto por dos quarks u y un quark d y el neutrón por un quark d y dos quarks u . Conocido el spín de los quarks (cuestión anterior), los protones y los neutrones son ¿fermiones o bosones? Recuerda los que sabes sobre suma de momentos angulares.

4.2 Sesión 23

(1) Gases ideales cuánticos

- Si se tienen N partículas independientes en una caja de modo que el hamiltoniano se escribe $H(N) = h(1) + h(2) + \dots + h(N)$. Repasa los argumentos presentados en clase para llegar a la representación de números de ocupación. Como caso particular razona con tres partículas idénticas en el caso fermiónico y bosónico.
- Repasa la derivación efectuada en clase de la función de partición gran canónica de un gas ideal cuántico.
- Discute el límite termodinámico de dicha función de partición en el caso de fermiones y de bosones.

(2) Ecuación de estado del gas ideal cuántico:

Se define la longitud de onda térmica $\lambda = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2}$ y la fugacidad z como $z = e^{\beta\mu}$ con μ el potencial químico. La presión media y el número medio de partículas están formalmente dadas por las expresiones

$$\frac{PV}{k_B T} = \pm \sum_{\mathbf{p}} \log(1 \pm ze^{\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}), \quad \begin{pmatrix} + & \text{Fermions} \\ - & \text{Bosons} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \frac{ze^{\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}{1 \pm e^{\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}, \quad \begin{pmatrix} + & \text{Fermions} \\ - & \text{Bosons} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Obtén y discute las siguientes expresiones en el límite termodinámico:

- Caso de Fermi:

$$(a) \frac{P}{k_B T} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^2 \log(1 + ze^{-x^2}) \equiv \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (4.3)$$

$$(b) \frac{N}{V} \equiv \frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \text{ con } f_{3/2}(z) = z \partial_z f_{5/2}(z) \quad (4.4)$$

$$(c) f_{5/2}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{z^n}{n^{5/2}} \quad (4.5)$$

$$(d) \frac{E}{V} = \frac{3}{2} \frac{k_b T}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (4.6)$$

- Caso de Bose. En este caso discute el porqué se ha dejado explícito el término con $\mathbf{p} = 0$.

$$(a) \frac{P}{k_B T} = -\frac{1}{\lambda^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^2 \log(1 - ze^{-x^2}) - \frac{1}{V} \log(1 - z) \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V} \log(1 - z) \quad (4.8)$$

$$(b) \frac{N}{V} \equiv \frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z} \text{ con } g_{3/2}(z) = z \partial_z g_{5/2}(z) \quad (4.9)$$

$$(c) g_{5/2}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{5/2}} \quad (4.10)$$

$$(d) \frac{E}{V} = \frac{3}{2} \frac{k_b T}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \quad (4.11)$$

NOTA: Recuerda que estos sistemas verifican que $E = 3PV/2$. En el caso de bosones esta expresión necesita de una justificación apropiada relacionada con el hecho de despreciar el término $\log(1 - z)/V$ en la ecuación (4.25)

4.3 Sesión 24

Gases de Fermi

- (1) Función $f_{3/2}(z)$. Nos interesamos al comportamiento de $f_{3/2}(z)$ para los límites $z \ll 1$ y $z \gg 1$.

- Para $z \ll 1$ se tiene $f_{3/2}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{z^n}{n^{3/2}}$ y
- para $z \gg 1$, $f_{3/2}(z) \approx \frac{4}{3\sqrt{3}} \left((\log z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-1/2} + \dots \right)$.

- (2) Gas de Fermi a altas temperaturas y bajas densidades ($\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$).

- Razona porqué el límite de altas temperaturas y bajas densidades corresponde a $z \ll 1$ (observa la ecuación(4.4)).
- Obtén a partir de la ecuación (4.4), z en función de λ^3/v
- Demuestra que en el límite que nos ocupa

$$\frac{P}{k_B T} = 1 + \left(\frac{\lambda^3}{v} \right) \frac{1}{2^{5/2}} + \dots$$

y discute esta fórmula.

(3) Gas de Fermi a bajas temperaturas y altas densidades ($\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$).

- En este límite $z \gg 1$. Empleando el desarrollo asintótico de $f_{3/2}(z)$ prueba que tomando el término dominante para z suficientemente grande se sigue

$$z \approx e^{\beta\epsilon_F} \quad \text{con} \quad \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{v} \right)^{2/3}$$

- **Energía de Fermi** (ϵ_F). El número de ocupación medio del estado \mathbf{p} , $\langle n_{\mathbf{p}} \rangle$ está dado por

$$\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}{1 + ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}$$

Sustituyendo el valor aproximado de z se sigue

$$\langle n_{\mathbf{p}} \rangle \approx \frac{1}{1 + ze^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_F)}}$$

Analiza el comportamiento de $\langle n_{\mathbf{p}} \rangle$ cuando $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$).

- Interpreta ϵ_F .
- Basándote en la interpretación de la energía de Fermi, obtén su valor para N fermiones con espín s (degeneración $g = 2s + 1$) a temperatura cero. Resultado:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{gv} \right)^{2/3}$$

(4) Funciones termodinámicas. Potencial químico μ .

- Siguiendo los pasos seguidos en clase demuestra la expresión

$$k_B T \log z = \mu = \epsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{(\beta\epsilon_F)^2} + \dots \right). \quad (4.12)$$

4.4 Sesión 25

Gas de Fermi a bajas temperaturas y altas densidades ($\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$).

(1) Presión, energía media y capacidad calorífica.

- Deriva la expresión de la energía

$$E = \frac{3}{5} \epsilon_F N \left(1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right)$$

- Calcula la capacidad calorífica e interpreta el resultado.
- Deriva la expresión de la presión

$$PV = \frac{2}{5} \epsilon_F N \left(1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right)$$

4.4.1 Aplicaciones. Materia en condiciones extremas

(1) Algunas estimaciones

- Supón que se tiene un plasma formado por electrones. Dicho plasma está neutralizado en su carga por la presencia de núcleos atómicos, aunque éstos no afectan a las propiedades termodinámicas del gas de electrones. Si se tienen N electrones, núcleos atómicos de carga Z y el volumen es V . Estima la distancia media entre núcleos.
- Estima la energía Coulombiana por electrón entre electrones y núcleos. Nota: Si se tienen dos cargas q_1 y q_2 a una distancia d la energía va como $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d}$, con ϵ_0 la permitividad del vacío.
- El gas de electrones se puede considerar ideal si la energía cinética por partícula es mucho mayor que la energía de Coulomb por partícula. Si la energía de Fermi es $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{2v}\right)^{2/3}$ (recuerda que los electrones tienen espín $1/2$ y por lo tanto $g = 2$), deduce el número de electrones por unidad de volumen N/V (densidad) para la que la energía de Fermi es mucho mayor que la energía Coulombiana por electrón.
- Haz algunos números! Sustituyendo los valores de las constantes físicas involucradas da una densidad y energía de Fermi típicas de un gas de electrones en el caso estudiado en el apartado anterior.

Una conclusión importante que podemos extraer es que a medida que aumenta la densidad el gas de electrones más cerca está de un gas ideal cuántico degenerado (altas densidades y bajas temperaturas).

4.5 Sesión 26

Pequeño proyecto:

4.5.1 Enanas Blancas (White dwarfs)

- (1) Repasa los argumentos empleados en la construcción del modelo de Enana Blanca que hemos trabajado.
- (2) Calcula la energía del estado fundamental de un gas ideal cuántico de electrones relativistas, recuerda que las energías propias son

$$\epsilon_{ps} = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2},$$

donde p es el momento lineal, s el espín, m_e la masa del electrón y c la velocidad de la luz.

- (3) Analiza el resultado en los límites $p_F/m_e c \ll 1$ and $p_F/m_e c \gg 1$, con p_F el momento de Fermi.
- (4) Calcula la presión de Fermi del gas fermiónico en los límites anteriores.

- (5) Calcula la contribución a la presión debida a la gravedad (fundamentalmente debida a los núcleos de Helio).
- (6) Analiza las condiciones de estabilidad de la estrella en los límites no relativista y ultrarelativista.
- (7) Deriva el *Límite de Chandrasekhar*.
- (8) En clase obtuvimos que $\bar{M}_0 \approx (\frac{27\pi}{64\alpha})^{3/2} (\frac{\hbar c}{Gm_p^2})^{3/2}$, con G la constante de gravitación universal, m_p la masa del protón, \hbar la constante de Plack reducida, c la velocidad de la luz y $\alpha = \mathcal{O}(1)$. Si las masas las medimos en unidades de $\frac{8m_p}{9\pi}$, calcula la masa crítica M_0 (nuestra estimación del *Límite de Chandrasekhar*). Compara tu resultado con la masa del sol M_\odot .
En unidades del sistema **MKS** (**M**etros **K**ilogramos **S**egundos) se tiene:

m_p	$1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg}$
\hbar	$1.05457 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{sec}$
G	$6.67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{sec}^2 \text{ kg})$
c	299792458 m/sec
M_\odot	$1.9891 \times 10^{30} \text{ kg}$

- (9) ¿Finalizará el Sol siendo una enana blanca?

4.6 Sesión 27

- (1) Repasa los siguientes conceptos
- Momento magnético y susceptibilidad magnética
 - Diamagnetismo y paramagnetismo

4.6.1 Diamagnetismo de Landau

Bajas temperaturas. Efecto de De Haas- van Alphen

- (a) Se tienen N electrones a temperatura cero en presencia de un campo magnético uniforme, de intensidad H y sus niveles cuánticos de Landau. Considera que los electrones están confinados en el plano xy . En ese caso tendrías niveles energéticos

$$\epsilon_{j_y} = \hbar \left(\frac{eH}{mc} \right) \left(j_y + \frac{1}{2} \right), \quad j_y = 0, 1, 2, \dots$$

con degeneración

$$g = \left(\frac{eH}{ch} \right) L^2.$$

En esta expresión $-e$ es la carga del electrón, c la velocidad de la luz m la masa del electrón y h la constante de Planck. Calcula la energía del estado fundamental del sistema.

- (b) Si el nivel con número cuántico k está totalmente ocupado pero el nivel con número cuántico $k + 1$ está parcialmente ocupado:
- (c) Haz un gráfico de la situación en la que se tienen $N = 7$ partículas en niveles con degeneración $g = 2$.
- (d) Calcula la energía por partícula en función de k y los parámetros relevantes del problema.
- (e) Representa gráficamente la energía por partícula en unidades del magnetón $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ y el campo magnético $H_0 = \frac{Nhc}{eL^2}$.

Sección avanzada: Niveles de Landau Pequeño proyecto:

- (1) Se considera un electrón de carga $-e$, con $e > 0$, con función de ondas $\psi(\mathbf{r})$, en un campo magnético uniforme \mathbf{H} . El momento canónico $\hat{\pi}$ relacionado con el momento lineal \hat{p} es

$$\hat{\pi} = \hat{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})$$

donde $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ es el potencial vector que verifica que $\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}$. Muestra la ecuación de valores propios $\hat{\pi}\psi = \lambda\psi$ es invariante "gauge", es decir, invariante ante la transformación;

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla\omega(\mathbf{r}), \quad \text{y} \quad \psi(\mathbf{r}) \rightarrow e^{\frac{ie}{\hbar c}\omega(\mathbf{r})}\psi(\mathbf{r})$$

con $\omega(\mathbf{r})$ una función escalar.

- (2) Al cuantizar la energía de un electrón en presencia de un campo magnético uniforme se obtiene para las energías, en función de los números cuánticos p_z, j_y la expresión

$$\epsilon_{p_z, j_y} = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar\left(\frac{eH}{mc}\right)\left(j_y + \frac{1}{2}\right)$$

$$j_y = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_z = \hbar n/L, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y cada energía tiene una degeneración $g = \left(\frac{eH}{ch}\right)L^2$ con $h = 2\pi\hbar$ y $L = V^{1/3}$.

- (a) Considera el movimiento clásico de un electrón en un campo magnético uniforme y obtén la trayectoria del mismo. Elige el campo magnético en la dirección del eje z .
- (b) ¿Qué unidades tiene el factor $\frac{eH}{mc}$? ¿Qué interpretación tiene dicho factor?
- (c) En su movimiento la proyección de la trayectoria en el plano xy es circular, ¿Cuál es área de la proyección?
- (d) ¿Ves alguna relación entre el área que has evaluado y la degeneración de los niveles de Landau?

4.7 Sesión 28

4.7.1 Paramagnetismo de Pauli

- (1) Si el potencial químico de un conjunto de N fermiones es $\mu(N)$ (ver la ecuación 4.12) y el número medio de partículas con espín positivo es N^+ , demuestra que N^+ es solución de

$$\mu(N^+) - \mu(N - N^+) = 2\mu_B H \quad (4.13)$$

- (2) Calcula la susceptibilidad paramagnética a bajas temperaturas y muestra que en el caso de que $\frac{k_B T}{\epsilon_F} \ll 1$ con $\epsilon_F(N) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N\pi^2}{V}\right)^{2/3}$ y $n = N/V$ se tiene

$$\chi \approx \frac{3n\mu_0^2}{2\epsilon_F} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F}\right)^2\right). \quad (4.14)$$

- (3) Calcula la susceptibilidad paramagnética a altas temperaturas y demuestra que

$$\chi_{Para} = -3\chi_{Dia}. \quad (4.15)$$

- (4) Discute el signo de la susceptibilidad diamagnética.
- Si se tiene un electrón en un plano y en presencia de un campo magnético uniforme. ¿Cómo es el movimiento del electrón?
 - ¿Cuál es la dirección y sentido del momento magnético de dicho electrón?
 - ¿Cómo es el sentido del momento magnético respecto al sentido del campo aplicado?
 - A la luz de la discusión anterior ¿qué puedes decir del signo que has obtenido en la susceptibilidad diamagnética?
 - ¿Puedes diseñar y discutir un experimento que permita distinguir en un material diamagnetismo de paramagnetismo?
- (5) (Opcional) Obtén numericamente una gráfica de la susceptibilidad paramagnética en función de la temperatura y diversos valores de campo magnético.

4.8 Sesión 29

4.8.1 Gases ideales de Bose: Fotones.

- (1) Radiación del cuerpo negro
- Sigue los pasos seguidos en clase para derivar la ley de Planck:
 - Si se tiene radiación electromagnética en equilibrio térmico a temperatura T en un volumen V demuestra que la energía media por unidad de volumen es

$$\frac{U}{V} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \equiv \int_0^\infty d\omega \mathcal{U}(\omega, T) \quad (4.16)$$

NOTA:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^k}{e^x - 1} = k! \zeta(k+1), \text{ con } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1) \quad (4.17)$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \dots \quad (4.18)$$

- Representa gráficamente la función $\mathcal{U}(\omega, T)$ para diferentes temperaturas.
- Deriva la presión media y su relación con la energía por unidad de volumen.
- Calcula la capacidad calorífica.
- Deriva la ley de Stephan-Boltzmann. Ésta nos dice que la energía total irradiada por un cuerpo negro por unidad de superficie y tiempo (irradiancia de un cuerpo negro o potencia emisiva) es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura. ¿Cuánto vale la constante de proporción entre la irradiancia y la potencia cuarta de la temperatura?
- *Estimación de Stephan de la temperatura superficial del Sol.* C. Soret (el que da nombre al efecto *Soret*) había estimado que la densidad de flujo energético que proviene del Sol era unas 29 veces mayor que la que emitiría una lámina metálica. Para ello Soret había colocado una lámina metálica circular frente a un detector de modo que el radio aparente de la placa metálica fuese igual al del Sol. La temperatura de la placa estaba entre 2170 K y 2270 K. Adicionalmente Stephan supuso que 1/3 de la radiación que provenía del Sol era absorbida por la atmósfera. ¿Cuál es la temperatura superficial del Sol estimada por Stephan empleando la Ley de Stephan-Boltzmann? Compara el resultado con el valor de 5778 K que es la temperatura efectiva del Sol, es decir la temperatura de un cuerpo negro que emitiese la misma cantidad de radiación electromagnética que el Sol.
- *Estimación de la temperatura superficial de la Tierra.* Supongamos que la Tierra (\oplus) y el Sol (\odot) irradian como cuerpos negros. Sea d la distancia media entre el Sol y la Tierra, R_{\oplus} el radio de la Tierra y R_{\odot} el radio del Sol.
 - Empleando la ley de Stephan-Boltzmann. Calcula la potencia total (no por unidad de área) radiada por el Sol si su temperatura efectiva es T_{\odot} .
 - Calcula la fracción de esa potencia que recibe la Tierra si su radio es R_{\oplus} (por lo tanto su sección eficaz es πR_{\oplus}^2).
 - Si la Tierra es un cuerpo negro a Temperatura T_{\oplus} expresa la potencia radiada por la Tierra.
 - Supón que toda la potencia recibida en la Tierra es reemitida; calcula T_{\oplus} .
 - Estima el valor numérico de T_{\oplus} si $d = 149600000 \text{ km}$, $R_{\odot} = 696000 \text{ km}$ y $T_{\odot} = 5778 \text{ K}$.

Esto es solo una estimación, un cálculo más refinado debe incluir otros aspectos como el *albedo* de la Tierra (que mide la fracción de la radiación recibida que es reflejada por la Tierra sin que la absorba). El albedo de la tierra es 0.29, es decir que el 29% de la radiación que llega a la tierra es reflejada sin absorción. Adicionalmente la radiación emitida por la Tierra es parcialmente reflejada por la atmósfera que contiene gases (en particular los responsables del efecto invernadero) y que por lo tanto no *escapa* de la Tierra contribuyendo a aumentar su temperatura efectiva. La temperatura efectiva de la Tierra es mayor que la estimación que has hecho, $T_{\oplus} \approx 288 K$

4.8.2 Argumento termodinámico conducente a $u = CT^4$

Por una parte $PV = U/3$ y por otra manipulando la ecuación fundamental del sistema e introduciendo relaciones de Maxwell, podemos llegar a una dependencia de U/V con T^4

$$dU = TdS - PdV \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P \quad (4.20)$$

Empleando a relaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T &= \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \\ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \\ \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V &= \frac{1}{3} \frac{d(U/V)}{dT} \\ 3P &= U/V = \frac{T}{3} \frac{d(U/V)}{dT} - \frac{U/V}{3} \\ 4 \frac{dT}{T} &= \frac{d(U/V)}{U/V} \Rightarrow U/V = CT^4 \end{aligned}$$

Como vemos, estos argumentos termodinámicos no dan cuenta de la constante de proporcionalidad en la Ley de Stephan-Boltzmann entre u y T .

4.9 Sesión 30

4.9.1 Gas de Bose: Valores posibles de la fugacidad z

Se han derivado las ecuaciones

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} \quad \text{con} \quad g_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n} \quad (4.21)$$

- (1) Analiza la función $g_{3/2}(z)$ y muestra que se debe satisfacer que $0 \leq z \leq 1$ si la ecuación (4.21) tiene sentido físico.
- (2) De la representación gráfica debes ver que se cumple que $g_{3/2}(z) \leq g_{3/2}(1) \forall z \in [0, 1]$.

4.9.2 Fugacidad en función de v y T

La fugacidad z es función de v y T (ó λ) y se obtendría formalmente de la ecuación (4.21) en el límite termodinámico.

- (1) Representa gráficamente la función $\frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z}$ en función de z para V fijo.
- (2) Discute las soluciones en z de la ecuación (4.21) en el límite $V \rightarrow \infty$ y demuestra que

$$z = \begin{cases} 1, & \lambda^3/v > g_{3/2}(1), \\ g_{3/2}^{-1}(\lambda^3/v), & \lambda^3/v < g_{3/2}(1), \end{cases} \quad (4.22)$$

donde $g_{3/2}^{-1}$ es la función inversa de $g_{3/2}$, es decir $g_{3/2}^{-1} \circ g_{3/2}[z] \equiv g_{3/2}^{-1}(g_{3/2}(z)) = z$. Esto es lo mismo que escribir z como solución de la ecuación $\lambda^3/v = g_{3/2}(z)$, aplica $g_{3/2}^{-1}$ a ambos lados de la ecuación y tendrás z .

- (3) De lo derivado actualmente se deduce que para T fijo existe un volumen por partícula crítico v_c y para v fijo una temperatura crítica T_c que al cruzarlos se está en la región con $z = 1$ o en la región con $z = g_{3/2}^{-1}(\lambda^3/v)$. Escribe las expresiones de v_c y T_c y verifica que:

$$z = \begin{cases} 1, & v < v_c (T < T_c), \quad (\lambda^3/v > g_{3/2}(1)), \\ g_{3/2}^{-1}(\lambda^3/v), & v > v_c (T > T_c), \quad \lambda^3/v < g_{3/2}(1) \end{cases} \quad (4.23)$$

4.9.3 Fracción de bosones en el estado fundamental. Condensación de Bose

- (4) Demuestra que si escribes $\langle n_0 \rangle / V$ a partir de la ecuación 4.21 se deduce que $\langle n_0 \rangle / V > 0$ si se cumple que $\lambda^3/v > g_{3/2}(1)$ y que si no, entonces $\langle n_0 \rangle / V = 0$. La existencia de esta fracción finita de bosones en el estado fundamental cuando se cruza el volumen o la temperatura crítica es lo que se conoce como *condensación de Bose-Einstein*.
- (5) Demuestra que

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} = 1 - \left(\frac{v}{v_c}\right), & \lambda^3/v > g_{3/2}(1), \\ 0, & \lambda^3/v < g_{3/2}(1), \end{cases} \quad (4.24)$$

- (6) Representa gráficamente $\langle n_0 \rangle / N$ en función de la temperatura y en función del volumen por partícula.
- (7) Demuestra que $\lim_{V \rightarrow \infty} \langle n_{\mathbf{p}} \rangle / V = 0$ si $\mathbf{p} \neq 0$.

4.9.4 Presión

Si se parte de la ecuación

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V} \log(1-z) \quad (4.25)$$

y se emplea (4.22) deduce que

$$\frac{P}{k_B T} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1), & v < v_c \ (\lambda^3/v < g_{3/2}(1)), \\ \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z), & v > v_c \ (\lambda^3/v < g_{3/2}(1)), \end{cases} \quad (4.26)$$

4.9.5 Energía media y capacidad calorífica

- (1) De las expresiones anteriores deduce la energía media por partícula para el gas de Bosones en las dos regiones de interés.
- (2) Deriva la capacidad calorífica por partícula en unidades de k_B . Representala gráficamente en función de la temperatura.
- (3) Discute su comportamiento a bajas temperaturas y en relación al comportamiento de la misma para un gas de fotones. ¿Porqué decaen a cero con potencias diferentes? ¿Cuál es el origen de la diferencia?
- (4) Discute el límite de altas temperaturas de la capacidad calorífica.

4.9.6 Comentario

Antes de 1995 la *condensación de Bose-Einstein* era sólo aplicable al ^4He (Helio 4) por debajo de 2.17K donde el helio líquido sufre una transición de fase a *superfluido*. De hecho, la capacidad calorífica tiene un comportamiento cualitativo con la temperatura muy similar a la que muestra la capacidad calorífica que has evaluado en los apartados anteriores. (Puedes consultar la figura 2 en: http://en.wikipedia.org/wiki/Superfluid_helium-4). Los átomos de Helio en fase líquida interaccionan fuertemente entre sí por lo modelarlos como un gas de ideal de bosones solo supone una descripción cualitativa.

En 1995 pudo obtenerse en el laboratorio un condensado de Bose-Einstein de átomos de Rubidio *débilmente interactuantes* que admiten una descripción más cercana a la que has aprendido.

Appendix A

Fórmulas

AVISO: Antes de emplear las fórmulas comprueba que son correctas.

(1) Funciones

- Heaviside (función escalón) Θ

$$\Theta(x) \begin{cases} 1, & \forall x > 0 \\ 0, & \forall x < 0. \end{cases}$$

- Relación con la Distribución de Dirac $\delta(x)$

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x)$$

- $\Gamma(x)$: Gamma de Euler.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dy y^{x-1} e^{-y}. \quad (\text{A.1})$$

$$\Gamma(x+1) = x!, \text{ para } x \in \mathbb{N} \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.3})$$

$$\Gamma(x + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2x-1)}{2^x}, \text{ para } x \in \mathbb{N} \quad (\text{A.4})$$

(2) Integrales

- Gaussianas

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\text{Re}(\alpha) > 0) \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-\alpha x^2} = \frac{3}{2^2 \alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^6 e^{-\alpha x^2} = \frac{3 \cdot 5}{2^3 \alpha^3} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\text{A.8})$$

$$\dots \quad (\text{A.9})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \frac{(2n-1)!!}{2^n \alpha^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\text{A.10})$$

$$\text{con } (2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot 3 \cdot 1 \quad (\text{A.11})$$

(3) Aproximación de Stirling

$$\log x! \approx x \log x - x + \frac{1}{2} \ln(2\pi x), \quad x \gg 1$$

(4) Volumen de una esfera de d dimensiones y radio r

$$V_d(r) = r^d \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}$$

(5) Fórmula de Euler-MacLaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} dx f(x) + \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{12} f^{(1)}(0) + \frac{1}{720} f^{(3)}(0) + \dots$$

(6) Desarrollos en serie de potencias

(a) Exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \forall x \quad (\text{A.12})$$

(A.13)

(b) Logaritmos

$$\log(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{para } -1 \leq x < 1 \quad (\text{A.14})$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{para } -1 < x \leq 1 \quad (\text{A.15})$$

(c) Series geométricas

$$\frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \sum_{n=0}^m x^n \quad \forall x \neq 1 \text{ y } m \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall |x| < 1 \quad (\text{A.17})$$

(d) Serie binómica

$$(1+x)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} x^n \quad \forall |x| < 1, \quad \text{con } \binom{z}{n} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(z-n+1)} \quad \text{y } \forall z \in \mathbb{C} \quad (\text{A.18})$$